появились два направления в исследовании дифференц. ур-ний: А. т. д. у. и теория *динамических систем*. В А. т. д. у. исследуют поведение решений на всей комплексной плоскости, расположение особых точек, поведение решений в их окрестности и т. д. В частности, методами А. т. д. у. изучают свойства спец. функций матем. физики. А. т. д. у. существенна для задачи о движении твёрдого тела вокруг неподвижной точки, задач гидро- и аэродинамики, теории солитонов и др. Методы и результаты А. т. д. у. различны для линейных и нелинейных дифференц. ур-ний.

Линейная теория. Рассмотрим систему из n ур-ний

$$w' = A(z)\,w + f(z), \tag{1}$$

где $w(z) = (w_1(z), \ldots, w_n(z))$, $f(z) = (f_1(z), \ldots, f_n(z))$, $A(z)$ — матрица-функция порядка $n \times n$ с элементами $a_{ik}(z)$, и скалярное ур-ние порядка n

$$w^{(n)} + a_1(z)\,w^{(n-1)} + \ldots + a_n(z)\,w = f(z). \tag{2}$$

Аналитичность решений. Пусть D — область в комплексной плоскости z, все элементы $a_{ik}(z)$ и ф-ции $f_i(z)$ аналитичны в D. Если область D односвязна, то все решения системы (1) являются однозначными аналитическими в D вектор-функциями, в неодносвязной области решения являются, как правило, многозначными. То же справедливо для ур-ния (2).

Особые точки (ОТ) и их классификация. Рассмотрим однородные ур-ния, соответствующие (1) и (2):

$$w'(z) = A(z)\,w, \tag{3}$$

$$w^{(n)} + a_1(z)\,w^{(n-1)} + \ldots + a_n(z)\,w = 0. \tag{4}$$

Точка z_0 наз. ОТ системы (3) или ур-ния (4), если она является ОТ для одного из элементов $a_{ik}(z)$ (коэф. $a_i(z)$). Пусть z_0 — полюс, тогда система (3) имеет фундам. матрицу $W(z)$ вида $W(z) = \Phi(z)\,(z-z_0)^P$, где P — пост. матрица, матрица-функция $\Phi(z)$ разлагается в ряд Лорана $\Phi(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} \varphi_k (z-z_0)^k$, сходящийся в нек-ром кольце вида $0 < |z-z_0| < R$. ОТ z_0 наз. регулярной, если ряд Лорана для $\Phi(z)$ содержит конечное число отрицат. степеней $z-z_0$, и иррегулярной в противном случае. Это косвенная классификация: она даётся в терминах свойств решений, а не коэф. системы. Аналогично классифицируются ОТ ур-ния (4). Бесконечно удалённая точка $z=\infty$ наз. ОТ системы (3), если точка $t=0$ — особая для системы $w_t' = -t^{-2} A(t^{-1})\,w$, полученной из (3) заменой переменного $z = 1/t$; аналогично для ур-ния (4).

Регулярные особые точки — наиб. простой и хорошо изученный тип ОТ. Точка z_0 является регулярной ОТ ур-ния (4) тогда и только тогда, когда

$$a_i(z) = (z-z_0)^{-i}\,p_i(z),$$

где ф-ции $p_i(z)$ аналитичны в точке z_0. Точка $z=\infty$ является регулярной ОТ ур-ния (4) тогда и только тогда, когда $a_i(z) = z^{-i} q_i(z)$, где ф-ции $q_i(z)$ аналитичны в точке $z = \infty$. Определяющее ур-ние в регулярной ОТ z_0 имеет вид

$$\rho(\rho-1)\ldots(\rho-n+1) + p_1(z_0)\,\rho(\rho-1)\ldots(\rho-n+2) + \ldots$$
$$\ldots + p_n(z_0) = 0,$$

его корни наз. характеристич. показателями в точке z_0. Если ни одна из разностей $\rho_i - \rho_k$, $i \neq k$, не есть целое число, то ур-ние (4) имеет след. фундам. систему решений:

$$w_i(z) = (z-z_0)^{\rho_i}\,\varphi_i(z),\ \ \varphi_i(z_0) = 1,\ \ 1 \leqslant i \leqslant n,$$

где ф-ции $\varphi_i(z)$ аналитичны в точке z_0. Если среди этих разностей есть целые числа, то решения могут содержать целые степени логарифма $\ln(z-z_0)$.

Ур-ние 2-го порядка с регулярной ОТ z_0 имеет вид

$$w'' + (z-z_0)^{-1}\,p_1(z)\,w' + (z-z_0)^{-2}\,p_2(z)\,w = 0, \tag{5}$$

где ф-ции $p_1(z)$, $p_2(z)$ аналитичны в точке z_0, определяющее ур-ние таково:

$$\rho(\rho-1) + \rho p_1(z_0) + p_2(z_0) = 0.$$

Если $\rho_1 - \rho_2$ — нецелое число, где ρ_i — характеристич. показатели, то ур-ние (5) имеет фундам. систему решений $w_i(z) = (z-z_0)^{\rho_i}\,\varphi_i(z)$, где ф-ции $\varphi_i(z)$ аналитичны в точке z_0, $\varphi_i(z_0) = 1$. Если $\rho_1 - \rho_2$ есть целое неотрицат. число, то ур-ние (5) имеет фундам. систему решений

$$w_1(z) = (z-z_0)^{\rho_1}\,\varphi_1(z),\ \ w_2(z) = (z-z_0)^{\rho_2}\,\varphi_2(z) +$$
$$+ \theta w_1(z)\ln(z-z_0),$$

где θ — постоянная, ф-ции $\varphi_i(z)$ аналитичны в точке z_0, $\varphi_i(z_0) = 1$.

Примеры: ур-ние Эйри: $w'' - zw = 0$, $z = \infty$ — иррегулярная ОТ; ур-ние Бесселя: $z^2 w'' + zw' + (z^2 - \gamma^2)\,w = 0$, $z = 0$ — регулярная, $z = \infty$ — иррегулярная ОТ; гипергеометрич. ур-ние: $z(1-z)\,w'' + [\gamma - (\alpha+\beta+1)z]\,w' - \alpha\beta w = 0$ имеет регулярные ОТ: 0, 1, ∞.

Ур-нием класса Фукса наз. ур-ние (4), все ОТ к-рого на римановой сфере являются регулярными. Известен общий вид таких ур-ний. Все осн. дифференц. ур-ния 2-го порядка, возникающие в задачах матем. физики, можно получить из ур-ния с пятью регулярными независимыми ОТ; при этом разности характеристич. показателей в каждой ОТ равны $1/2$.

Точка z_0 является регулярной ОТ системы (3), если $A(z) = (z-z_0)^{-1} B(z)$, где матрица-функция $B(z)$ аналитична в точке z_0, $B(z_0) \neq 0$. Если все разности $\rho_i - \rho_k$, $i \neq k$, где ρ_i — собств. значения матрицы $B(z_0)$, не являются целыми числами, то система (3) имеет фундам. матрицу вида $W(z) = \Phi(z)\,(z-z_0)^P$, где P — диагональная матрица с элементами $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$, матрица-функция $\Phi(z)$ аналитична в точке z_0 и невырождена. Если среди этих разностей есть целые числа, то фундам. матрица содержит целые степени $\ln(z-z_0)$. Неизвестны необходимые и достаточные условия того, что z_0 — регулярная ОТ системы (3). Система $w' = w\sum_{k=0}^{m} A_k \times (z-a_k)^{-1}$, где a_k — разл. комплексные числа, A_k — пост. ненулевые матрицы порядка $n \times n$ и $A_1 + \ldots + A_m \neq 0$, является системой класса Фукса и имеет регулярные ОТ $a_1, a_2, \ldots, a_m, \infty$.

Иррегулярные особые точки. Пусть в системе (3)

$$A(z) = z^r \sum_{k=0}^{\infty} A_k z^{-k},\ \ A_0 \neq 0,$$

где $r \geqslant 0$ — целое, ряд сходится при $|z| > R$, тогда $z = \infty$ есть иррегулярная ОТ, и система имеет фундам. матрицу вида $W(z) = S(z)\exp Q(z)$, где $Q(z)$ — диагональная матрица, элементы к-рой являются многочленами от $z^{1/n}$, $n > 0$ — целое: $q_{ii}(z) = q_{i0} z^{l_i/n} + q_{i1} z^{(l_i-1)/n} + \ldots + q_{i,\,l_i-1} z^{1/n}$. Элементы s_{ik} матрицы S имеют вид

$$s_{ik}(z) = z^{r_{ik}} \sum_{m=0}^{m_{ik}} \sigma_{ikm}(z)\ln^m z,$$

$$\sigma_{ikm}(z) = \sum_{l=0}^{\infty} \sigma_{ikml} z^{-l/n}.$$

Эти ряды сходятся лишь в исключит. случаях и являются асимптотич. разложениями нек-рой фундам. матрицы в нек-рых секторах комплексной плоскости z при $|z| \to \infty$. Асимптотика фундам. системы решений ур-ния 2-го порядка

$$w'' - z^r(a_0 + a_1 z^{-1} + \ldots)\,w = 0$$

даётся ВКБ-формулой

$$w_{1,2} \sim z^{-r/4}\exp\left(\pm\int_{z_0}^{z} t^{r/2}(a_0 + a_1 t^{-1} + \ldots)^{1/2}\,dt\right)$$

(см. *Квазиклассическое приближение*) при $|z| \to \infty$, z лежит в секторе $\alpha < \arg z < \beta$, $\beta - \alpha < 2\pi/(r+2)$.

Нелинейная теория. Рассмотрим систему из n ур-ний и задачу Коши

$$w' = f(z, w),\ \ w(z_0) = w_0. \tag{6}$$

Теорема Коши. Пусть вектор-функция $f(z, w)$ аналитична в окрестности точки $z = z_0$, $w = w_0$, тогда