существует, и притом только одно, решение задачи (6), аналитичное в окрестности точки z_0.

Если аналитически продолжить это решение, то оно будет иметь ОТ. Одно из осн. различий между линейными и нелинейными ур-ниями состоит в том, что решения линейного ур-ния имеют только неподвижные ОТ (они совпадают с ОТ коэфф. и правой части), решения нелинейного ур-ния могут иметь иные (подвижные) ОТ. Пример: ур-ние $w' = w^2$, решение $w = -(z-C)^{-1}$ имеет полюс в точке $z=C$, C любое. Классификация ОТ следующая. 1) Алгебраическая ОТ. Вблизи точки $z=a$ решение представимо сходящимся рядом по целым или дробным степеням $z-a$: $w(z) = (z-a)^{p/q}\sum_{i=0}^{\infty} c_i (z-a)^{i/q}$, где p, q — целые числа, $q \geqslant 1$. 2) Трансцендентная ОТ. Это такая неалгебраич. ОТ, что существует $\lim\limits_{z\to a} w(z)$. Пример: $w = \ln(z-C)$. 3) Существенно особая точка. Предел $\lim\limits_{z\to a} w(z)$ не существует. Ур-ние $P(z, w, w') = 0$ не имеет подвижных существенно особых точек, если P — полином от w, w' с аналитическими по z коэфф.

Рассмотрим автономную систему из n ур-ний

$$w' = f(w), \quad w = (w_1, \ldots, w_n), \quad f = (f_1, \ldots, f_n), \qquad (7)$$

вектор-функция $f(w)$ аналитична в окрестности точки $w=0$ и $f(0)=0$. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — собств. значения матрицы Якоби $f'(0) = \partial f_i/\partial w_j|_{w=0}$, т. е. матрицы линеаризов. системы. Они наз. резонансными, если $\lambda_s = \sum_{j=1}^{n} m_j\lambda_j$ при нек-ром s, где $m_j \geqslant 0$ — целые числа, $\sum_{j=1}^{n} m_j \geqslant 2$, и нерезонансными в противном случае.

Теорема Пуанкаре. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ нерезонансны и лежат по одну сторону от нек-рой прямой в комплексной плоскости λ, проходящей через начало координат. Тогда с помощью аналитич. замены переменных $w = g(u)$, $g(0)=0$ система (7) приводится к виду $u_j' = \lambda_j u_j$, $j=1, \ldots, n$ в нек-рой окрестности точки $w=0$.

Лит.: Айнс Э. Л., Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с англ., Хар., 1939; Голубев В. В., Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, 2 изд., М.— Л., 1950; Коддингтон Э., Левинсон Н., Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1958; Морс Ф. М., Фешбах Г., Методы теоретической физики, пер. с англ., т. 1, М., 1958; Арнольд В. И., Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений, М., 1978; Федорюк М. В., Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, М., 1983. *М. В. Федорюк.*

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ (голоморфная функция) — функция $f(z)$ комплексной переменной $z = x+iy$, к-рая дифференцируема в след. смысле: в каждой точке z_0 нек-рой области D комплексной плоскости $\mathbb{C}$ существует производная $f'(z_0) = \lim\limits_{\Delta z\to 0} \frac{[f(z_0+\Delta z) - f(z_0)]}{\Delta z}$, причём предел не зависит от способа стремления Δz к нулю. Рассматриваются А. ф. мн. комплексных переменных.

А. ф. широко распространены в математике и её физ. приложениях. Ряд задач классич. веществ. анализа решается переходом к комплексным переменным. Все элементарные и спец. ф-ции аналитичны в тех или иных областях, причём выход в комплексную плоскость обнаруживает глубокие связи между этими ф-циями. Теория А. ф. прямо связана с теорией двумерного *Лапласа уравнения* и, следовательно, с теорией *гармонических функций*. Важной характеристикой А. ф. являются её особенности, т. е. точки комплексной плоскости, в к-рых нарушается аналитичность. Классификация особенностей А. ф. позволяет во многом охарактеризовать и свойства ф-ции в целом. Ф-ции комплексной переменной использовались уже в 18 в., в частности в работах Л. Эйлера (L. Euler). Окончательно теория А. ф. одной переменной оформилась в работах О. Коши (A. Cauchy), К. Вейерштрасса (K. Weierstrass) и Б. Римана (B. Riemann) в 19 в. Теория А. ф. многих переменных продолжает интенсивно развиваться.

Одна из причин широкого применения А. ф. в физике связана с физ. требованиями типа причинности. Так, в квантовой теории поля аналитичность *Уайтмена функций* и амплитуд рассеяния вытекает из исходных постулатов теории. Метод *дисперсионных соотношений* целиком базируется на теории А. ф., ур-ния Янга — Миллса можно записать как условия аналитичности нек-рых ф-ций. Большое число приложений А. ф. связано также с двумерными задачами электростатики, гидродинамики и т. д., где используются, напр., *конформные отображения*.

Основные свойства. Если u и v — вещественная и мнимая части ф-ции $f(z) = f(x+iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, то требование существования комплексной производной эквивалентно т. н. ур-ниям Коши — Римана

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x, y)}{\partial x},$$

из к-рых следует, что u и v являются гармонич. ф-циями. Две ф-ции, гармонические в области D и удовлетворяющие там ур-ниям Коши — Римана, наз. взаимно сопряжёнными. Любая производная $f^{(n)}(z)$ А. ф. $f(z)$ есть также А. ф. В окрестности каждой точки z из области D А. ф. можно разложить в абсолютно сходящийся ряд Тейлора:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n, \text{ где } c_n = f^{(n)}(z_0)/n!.$$

Радиус сходимости этого ряда $R = (\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n})^{-1}$ не меньше радиуса любого круга с центром в z_0, содержащегося в D. Обратно, если в каждой точке z_0 из D ф-ция $f(z)$ представима абсолютно сходящимся степенным рядом, то $f(z)$ аналитична в D, так что разложимость в степенной ряд можно считать др. эквивалентным определением А. ф.

Пример: для распространённых элементарных ф-ций e^z, $\sin z$ и $\cos z$ имеют место след. разложения в точке $z_0 = 0$:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!},$$

из к-рых, в частности, вытекает ф-ла Эйлера

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z.$$

Специфичны и интегральные св-ва А. ф. Если замкнутый контур γ целиком лежит в области аналитичности D ф-ции $f(z)$ и там его можно стянуть в точку, то интеграл от $f(z)$ по этому контуру равен нулю. Это свойство также вполне характеризует А. ф.: если $\int_\gamma f(z)dz = 0$ для нек-рой непрерывной в D ф-ции $f(z)$ для любого контура γ с перечисленными выше свойствами, то $f(z)$ аналитична в D. Для А. ф. выполняется важная ф-ла Коши

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz,$$

справедливая для любой точки z_0, к-рая лежит в области, ограниченной контуром γ, причём направление обхода контура должно быть таким, чтобы область оставалась слева.

Для А. ф. имеет место принцип максимума модуля, согласно к-рому модуль А. ф., отличной от постоянной, не может достигать своего макс. значения ни в какой внутр. точке области аналитичности D. Напр., если А. ф. задана в единичном шаре $\{|z| < 1\}$, по модулю не превосходит там 1 и $f(0) = 0$, то $|f(z)| < |z|$ при $|z| < 1$ (лемма Шварца). Применительно к областям спец. вида принцип максимума приводит к следующей теореме Фрагмена — Линделёфа. Пусть $f(z)$ аналитична в секторе $|\arg z - \varphi_0| < \pi/2\rho$ и непрерывна вплоть