H_0 — невозмущённая *Гамильтона функция* (отвечает задаче Кеплера), q, p — совокупность всех q_a, p_a, H_1 — возмущение (учитывает взаимодействие с другой планетой). Решение невозмущённой задачи (при $H_1=0$) имеет вид:

$$q_a = q_a(\alpha_j,\ \beta_j;\ t),$$
$$p_a = p_a(\alpha_j,\ \beta_j;\ t),\quad j=1,\ \ldots,\ n, \tag{3}$$

где α_j, β_j — произвольные постоянные, в качестве к-рых в рассмотренном выше примере можно выбрать оскулирующие элементы. Тогда с учётом возмущения α_j и β_j становятся ф-циями времени:

$$\dot{\alpha}_j = \frac{\partial H_1}{\partial \beta_j},\quad \dot{\beta}_j = -\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_j}. \tag{4}$$

Ур-ниям (4) можно придать форму:

$$\dot{x}_k = \varepsilon f_k(x_1,\ \ldots,\ x_{2n};\ t),$$
$$k=1,\ \ldots,\ 2n, \tag{5}$$

в к-рой явно выделен малый параметр ε, содержащийся в возмущении. С помощью подходящего преобразования нач. условия всегда можно выбрать нулевыми: $x_k(0)=\dot{x}_k(0)=0$. Решение удобно искать в виде ряда по ε:

$$x_k(t) = x_k^{(0)} + \varepsilon x_k^{(1)} + \ldots;$$
$$\dot{x}_k(t) = \dot{x}_k^{(0)} + \varepsilon \dot{x}_k^{(1)} + \ldots. \tag{6}$$

Подставляя (6) в (5) и приравнивая члены при одинаковых степенях ε, получаем:

$$\dot{x}_j^{(1)} = f_j(0,\ 0,\ \ldots,\ 0;\ t);\ x_j^{(1)} = \int_0^t \dot{x}_j^{(1)}\,dt;$$
$$\dot{x}_j^{(2)} = \sum_{k=1}^{2n} x_k^{(1)} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} f_j(x_1,\ \ldots,\ x_{2n};\ t)\right)_{x=0}; \tag{7}$$
$$x_j^{(2)} = \int_0^t \dot{x}_j^{(2)}\,dt$$

и т. д. Т. о., задача сводится к последоват. вычислению ряда интегралов от известных ф-ций.

Однако при конкретном осуществлении описанной процедуры часто возникают осложнения. Координата планеты $q(t)$ в нулевом приближении является периодич. ф-цией времени, к-рая содержит осн. гармонику с частотой $\omega=2\pi/T$ (где T — период обращения планеты) и колебания, отвечающие высшим гармоникам с частотами $n_j\omega_j$. Поэтому все ф-ции, входящие в задачу, представляются в виде рядов Фурье, а ур-ния (4), (5) должны быть написаны для коэффициентов таких рядов. Расстояние между планетами $r(t)$, входящее в возмущающие силы, будет содержать комбиниров. частоты $n_j\omega_j \pm n_j'\omega_j'$, где n_j, n_j' пробегают все целые значения. Среди них будут встречаться малые частоты, если осн. частоты ω_j и ω_j' являются кратными. Кроме того, в возмущающей силе всегда есть член, соответствующий нулевой гармонике, к-рый не зависит от времени. Он отвечает среднему действию возмущающей силы за времена, большие по сравнению с периодами обращения планет.

Возмущения, не зависящие от времени, согласно ф-лам (7), дают поправки к оскулирующим элементам, линейно растущие со временем. Такие возмущения наз. вековыми. (Существует, однако, теорема, что большая полуось эллипса a не содержит вклада от вековых возмущений.) Для отд. простых ситуаций оказывается возможным доказать, что суммирование вековых возмущений во всех порядках сводится к смещению осн. частот на величины, пропорциональные возмущающим силам, и не приводит при $t\to\infty$ к большим искажениям траекторий планет.

Особого рассмотрения требуют также те члены в возмущающей силе, к-рые содержат комбиниров. частоты. Эти члены наз. критическими. Они тоже приводят к нарастающим со временем поправкам к невозмущённому движению. С ними связано, в частности, явление т. н. либрации — колебание больших полуосей эллипсов или к.-л. др. параметров, характеризующих орбиту. Либрация часто встречается в системах планета — спутник.

Правильный учёт вековых возмущений и либрации позволяет с хорошей точностью аппроксимировать решение задачи трёх тел в небесной механике тригонометрич. рядами, что соответствует периодич. движению. Погрешность, даваемая такими рядами за промежутки времени $\leqslant 1000$ лет, меньше точности астр. наблюдений. Существование таких решений гарантирует устойчивость планетной системы для промежутков времени $\leqslant 10^6$ лет. Но точное (при всех временах) представление решения в виде тригонометрич. рядов невозможно [А. Пуанкаре (H. Poincaré), 1892]. Поэтому неизвестно, насколько сильно изменится Солнечная система за времена $t \gg 10^6$ лет, в частности не окажутся ли планеты в опасной близости к Солнцу.

Всегда существуют, однако, частные решения, отвечающие периодич. движению. Если представлять наборы параметров (нач. значений координат и скоростей), характеризующих движение, в виде точек на прямой, то частные периодич. решения будут располагаться на ней с плотностью, соответствующей распределению рациональных чисел (Пуанкаре, 1899). Поэтому в произвольной близости к произвольно заданным нач. значениям координат и скоростей всегда существуют такие нач. значения, к-рые отвечают периодич. решению.

Но движение может не быть периодическим, и тем не менее параметры орбит будут оставаться огранич. ф-циями времени, т. е. планеты не уйдут на бесконечность. Именно такая ситуация при довольно слабых ограничениях на нач. условия реализуется в Солнечной системе (В. И. Арнольд, 1961).

Проблема устойчивости движения в классической механике

Ещё одним важным аспектом В. т. в классич. механике являются возмущения траекторий, вызванные малым изменением нач. условий. Здесь следует отметить выяснение проблемы устойчивости движения по первому приближению В. т. При нек-рых, довольно слабых ограничениях имеются след. утверждения (А. А. Ляпунов, 1892). Пусть изменение нач. условий характеризуется малым параметром ε. Если поправки к решению, полученные в первом приближении по ε, не содержат экспоненциально нарастающих по времени членов, то движение в целом будет устойчивым. Если такие члены содержатся в первом приближении, то движение окажется неустойчивым. Т. о., отброшенные члены, соответствующие высшим приближениям по ε, не влияют на устойчивость движения.

Теория возмущений в квантовой механике

Рассмотрим примеры, характеризующие методику В. т. в квантовой механике.

Стационарная В. т. Пусть квантовомеханич. система находится в стационарном состоянии, а энергия возмущения не зависит от времени. Осн. задачей здесь является нахождение уровней энергии $\mathcal{E}_n$ и волновых ф-ций ψ_n возмущённой системы. Эта задача аналогична учёту вековых возмущений в классич. механике. Ожидается, что энергия (частота) нач. состояния изменится пропорционально возмущению и, кроме того, изменится форма волновой ф-ции. Аналитически решение данной задачи выглядит след. образом. Стационарное *Шрёдингера уравнение* имеет вид:

$$(H_0 + U)\,\psi_n = \mathcal{E}_n \psi_n, \tag{8}$$

где H_0 — гамильтониан нулевого приближения, $U=\varepsilon V$ — оператор возмущения. Полный набор состоя-