виде $\frac{1}{2}\ (1+\gamma^5)\ u_\lambda(p)$. Если масса нейтрино равна нулю, то

$$\frac{1}{2}\ (1+\gamma^5)\ u_\lambda(p)=0 \ \text{ при } \lambda=\tfrac{1}{2},$$
$$\frac{1}{2}\ (1+\gamma^5)\ u_\lambda(p)=u_\lambda(p) \ \text{ при } \lambda=-\tfrac{1}{2},$$

т. е. спиральность нейтрино равна $-\frac{1}{2}$. Частице с отрицат. энергией соответствует антинейтрино (см. ниже), его спиральность равна $+\frac{1}{2}$.

В нерелятивистском случае $\beta=|\boldsymbol{p}|/p_0\ll 1$ (в системе СГС $\beta=v/c$, где v — скорость частицы), и спиноры $u_\lambda(\pm p)$ с точностью до линейных по β членов даются выражениями:

$$u_\lambda(p)=N\begin{pmatrix} v_\lambda \\ \beta\lambda v_\lambda \end{pmatrix},\quad u_\lambda(-p)=N\begin{pmatrix} -\beta\lambda v_\lambda \\ v_\lambda \end{pmatrix}. \qquad (11)$$

Отсюда следует, что для нерелятивистской частицы «нижние» («верхние») компоненты решений Д. у. с положительной (отрицательной) энергией много меньше «верхних» («нижних») компонент.

Приведём след. полезные соотношения:

$$\begin{gathered}\bar{u}(\pm p)\,\gamma^\mu u(\pm p)=\pm(p^\mu/m)\,\bar{u}(\pm p)\,u(\pm p),\\ u(\pm p)\,\gamma^5 u(\pm p)=0,\\ p_\mu\bar{u}(\pm p)\,\gamma^\mu\gamma^5 u(\pm p)=0.\end{gathered} \qquad (12)$$

Для вычисления сечения процессов с участием релятивистских частиц со спином $\frac{1}{2}$ необходимо знать суммы: $\sum_\lambda u_\lambda(p)\ \bar{u}_\lambda(p)$ и $\sum_\lambda u_\lambda(-p)\ \bar{u}_\lambda(-p)$. Если спиноры $u_\lambda(\pm p)$ нормированы условиями $\bar{u}_\lambda(\pm p)\ \gamma^0 u_\lambda(\pm p)=2\,p_0$, то

$$\sum\nolimits_\lambda u_\lambda(\pm p)\,\bar{u}_\lambda(\pm p)=\hat{p}\pm m. \qquad (13)$$

Решения Д. у. с отрицат. полной энергией — несомненная трудность квантовой механики релятивистской частицы. Для её устранения Дирак предположил, что состоянием с мин. энергией (вакуумным состоянием) является состояние, в к-ром все уровни с отрицат. энергией заполнены. Если из этого заполненного «моря» состояний с отрицат. энергией вырвать одно состояние (образовать т. н. дырку Дирака), то полученное при этом состояние будет иметь положит. энергию (см. *Дырок теория Дирака*). Масса частицы, описываемой этим состоянием, равна массе электрона, а её заряд противоположен заряду электрона. Такая частица — *античастица* по отношению к электрону — была открыта К. Андерсоном (C. Anderson) в 1932 и наз. *позитроном*.

Последоват. реализация идеи Дирака о существовании решений с отрицат. энергией требует по существу выхода за рамки одночастичного ур-ния для релятивистской частицы и осуществляется только в *квантовой теории поля*.

Как отмечалось, Д. у. инвариантно относительно преобразований Лоренца

$$(x')^\mu=a^\mu_\nu x^\nu,$$

где $a^\mu_\nu a^\nu_\sigma=\delta^\mu_\sigma$ (δ^μ_σ — символ Кронекера). Если записать преобразование спинора в виде

$$\psi'(x')=U\psi(x), \qquad (14)$$

где U — 4×4 матрица, то из условия инвариантности Д. у. следует, что

$$U^{-1}\gamma^\mu U=a^\mu_\nu\gamma^\nu. \qquad (15)$$

Сопряжённый спинор преобразуется след. образом:

$$\bar{\psi}'(x')=\bar{\psi}(x)\,U^{-1}. \qquad (16)$$

Для преобразований Лоренца

$$(x')^1=\frac{x^1+\beta x^0}{\sqrt{1-\beta^2}},\quad (x')^0=\frac{x^0+\beta x^1}{\sqrt{1-\beta^2}},\quad (x')^2=x^2,\quad (x')^3=x^3$$

матрица U имеет вид

$$U=\exp(\gamma^0\gamma^1\eta/2), \qquad (17)$$

где $\mathrm{th}\,\eta=\beta$ (β — скорость одной системы относительно другой). Для преобразования из системы покоя частицы в систему, где её импульс равен $\boldsymbol{p}$, а энергия p_0, имеем:

$$U=\sqrt{\frac{p_0+m}{2m}}\left(1+i\,\frac{\gamma^\alpha p^\alpha\gamma^0}{p_0+m}\right),\quad \alpha=1,\ 2,\ 3. \qquad (18)$$

При построении лагранжианов взаимодействия в квантовой теории поля широко используются трансформац. свойства величин $\bar{\psi}O^k\chi$, где ψ и χ — биспиноры Дирака (спинорные *Дирака поля*), а

$$O^k=1;\quad \gamma^\mu;\quad \sigma^{\mu\nu}=-\frac{1}{2i}(\gamma^\mu\gamma^\nu-\gamma^\nu\gamma^\mu);\quad \gamma^\mu\gamma^5;\quad \gamma^5$$

— полная система 16 матриц Дирака. Из (14)—(16) следует, что

$\bar{\psi}\chi$ — скаляр,
$\bar{\psi}\gamma^\mu\chi$ — четырёхмерный вектор,
$\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\chi$ — тензор второго ранга,
$\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\chi$ — псевдовектор,
$\bar{\psi}\gamma^5\chi$ — псевдоскаляр.

Волновое ур-ние для релятивистской частицы со спином $\frac{1}{2}$ в эл.-магн. поле может быть получено из ур-ния для свободной частицы заменой

$$\frac{\partial\psi}{\partial x^\mu}\longrightarrow\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}+ieA_\mu\right)\psi, \qquad (19)$$

где e — электрич. заряд частицы, а $A_\mu=(\varphi,\ -\boldsymbol{A})$ — четырёхмерный потенциал эл.-магн. поля (φ — скалярный потенциал, $\boldsymbol{A}$ — векторный). Т. о., Д. у. для электрона (мюона) в эл.-магн. поле имеет вид:

$$i\gamma^\mu\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}+ieA_\mu\right)\psi-m\psi=0. \qquad (20)$$

Это ур-ние инвариантно относительно локальных *калибровочных преобразований*

$$\begin{gathered}\psi'(x)=e^{i\Lambda(x)}\psi(x),\\ A'_\mu(x)=A_\mu(x)-\frac{1}{e}\frac{\partial\Lambda(x)}{\partial x^\mu},\end{gathered} \qquad (21)$$

где $\Lambda(x)$ — произвольная вещественная ф-ция x. В нерелятивистском пределе в первом порядке по β для «верхнего» спинора $v_\lambda(x)$ из Д. у. (20) вытекает *Паули уравнение*. При этом для магн. момента электрона автоматически получается правильное значение $e\hbar/2mc$ (в СГС системе единиц). Если учитывать также члены второго порядка по β, то в ур-нии для $v_\lambda(x)$, вытекающем из Д. у. в центр. поле $V(r)$ (r — расстояние до центра), возникает потенциал *спин-орбитального взаимодействия*:

$$V_{\text{с.-о.}}=\frac{1}{2m^2}\,\frac{1}{r}\,\frac{dV(r)}{dr}\cdot\frac{1}{2}\,\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{L}. \qquad (22)$$

Здесь $\boldsymbol{L}=[\boldsymbol{r}\boldsymbol{p}]$ — оператор орбитального момента. Д. у. в кулоновском поле точечного ядра с зарядом Ze, $V=-Ze^2/r$ может быть решено точно. Для уровней энергии электрона в атоме возникает при этом выражение

$$\mathcal{E}_{nj}=m\left[1+\left(\frac{Z\alpha}{n-(j+{}^1/_2)+\sqrt{(j+{}^1/_2)^2-(Z\alpha)^2}}\right)^2\right]^{-1/2}. \qquad (23)$$

Квантовое число n принимает целые значения 1, 2, 3, . . ., а квантовое число полного момента j — полуцелые, такие что $j+{}^1/_2\leqslant n$ ($\alpha\approx{}^1/_{137}$ — постоянная тонкой структуры). Если $Z\alpha\ll 1$, то с точностью до членов $(Z\alpha)^4$ из (23) следует:

$$\mathcal{E}_{nj}\approx m\left\{1-\frac{1}{2}\frac{(Z\alpha)^2}{n^2}\left[1+\frac{(Z\alpha)^2}{n}\left(\frac{1}{j+{}^1/_2}-\frac{3}{4n}\right)\right]\right\}. \qquad (24)$$