или движений. В частности, преобразования, сохраняющие метрику n-мерного евклидова пространства, наз. ортогональными и образуют группу $O(n)$. Дифференцируемое преобразование *симплектического многообразия*, сохраняющее *симплектическую структуру*, наз. симплектич. диффеоморфизмом. Если симплектич. структуру интерпретировать как гамильтонову структуру на фазовом пространстве, то симплектич. диффеоморфизм наз. каноническим преобразованием (см. *Гамильтонов формализм*).

Дифференцируемое преобразование $\alpha: M \to M$ порождает некоторое преобразование α^* пространства всех дифференцируемых ф-ций на M. Ф-ции φ сопоставляется при этом новая ф-ция $\alpha^*\varphi$, значения к-рой находят по ф-ле $(\alpha^*\varphi)(x) = \varphi(\alpha^{-1}(x))$. В дальнейшем под отображениями всегда будут иметься в виду дифференцируемые отображения.

Векторные поля. Важную роль в матем. анализе играет операция дифференцирования. В евклидовом пространстве из-за существования выделенных декартовых координат достаточно удобным является дифференцирование по координатам. В произвольном М., где все координаты равноправны, вводят понятие инвариантного (не зависящего от выбора координат) дифференцирования. В результате возникают понятия касат. вектора и векторного поля, а также дифференцирования вдоль касат. вектора и вдоль векторного поля.

Если имеется 2-мерная поверхность в 3-мерном евклидовом пространстве, то в каждой точке можно провести к этой поверхности касат. вектор, а все векторы, касающиеся поверхности в данной точке, образуют касат. плоскость. В теории М. понятие касат. вектора и касат. пространства необходимо определить внутр. образом, не обращаясь к вложению М. в евклидово пространство. Для этого вектор, касающийся М. в нек-рой точке, интерпретируют как задающий нек-рое направление в этой точке и скорость движения по этому направлению. Направление и скорость движения вдоль него можно охарактеризовать при помощи параметризов. кривой, целиком лежащей в М. и проходящей через данную точку. Это и служит основой для определения касат. вектора в произвольном М.

Пусть на многообразии M задана гладкая кривая $t \to x(t)$, проходящая через точку $x \in M$, т. е. удовлетворяющая условию $x(0) = x$. Вводя в окрестности точки x систему координат, получим описание кривой при помощи числовых ф-ций $x^i(t)$, $i = 1, \ldots, n$. Такая кривая определяет в точке x к а с а т е л ь н ы й в е к т о р X, а числа $X^i = dx^i(t)/dt|_{t=0}$ являются компонентами этого вектора по отношению к данной системе координат. Разумеется, другая кривая, $t \to \tilde{x}(t)$, проходящая через точку x и касающаяся первой кривой в этой точке (т. е. такая, что $d\tilde{x}^i(t)/dt|_{t=0} = dx^i(t)/dt|_{t=0}$), определяет тот же самый касат. вектор. Поэтому вектор X соответствует целому пучку касающихся друг друга кривых. Все касат. векторы в данной точке $x \in M$ образуют *векторное пространство* размерности n, называемое к а с а т е л ь н ы м п р о с т р а н с т в о м и обозначаемое T_x. Касат. вектор является геом. объектом, т. е. он не зависит от системы координат; его компоненты при переходе от одной координатной системы к другой преобразуются по закону

$$X'^i = \sum_j X^j \partial x'^i/\partial x^j.$$

Объединение всех касат. пространств к М. образует новое М., наз. касат. *расслоением* над первонач. М.

Касат. вектор $X \in T_x$ позволяет сопоставить каждой (дифференцируемой) ф-ции φ на M число $X\varphi = d\varphi(x(t))/dt|_{t=0}$, называемое производной ф-ции вдоль данного вектора. Через компоненты вектора эта производная выражается в виде $X\varphi = \sum_i X^i \partial\varphi/\partial x^i|_x$. При переходе к др. системе координат это выражение остаётся неизменным, в чём проявляется инвариантный характер понятия касат. вектора и дифференцирования вдоль него. При дифференцировании произведения двух ф-ций выполняется правило Лейбница:

$$X(\varphi\psi) = (X\varphi)\psi(x) + (X\psi)\varphi(x).$$

Если в каждой точке $x \in M$ задан касат. вектор $X(x) \in T_x$, то говорят, что на M задано в е к т о р н о е п о л е X. Если компоненты этого поля $X^i(x)$ являются гладкими ф-циями в любой карте из атласа, то векторное поле наз. д и ф ф е р е н ц и р у е м ы м. Векторное поле X сопоставляет каждой ф-ции φ на M новую ф-цию $X\varphi$ со значениями $(X\varphi)(x) = X(x)\varphi$. Она наз. результатом дифференцирования ф-ции φ вдоль векторного поля X. Т. о., чтобы продифференцировать ф-цию вдоль векторного поля, нужно продифференцировать её вдоль каждого вектора $X(x)$, $x \in M$, и полученные числа считать значениями новой ф-ции. При этом дифференцируемая ф-ция переводится гладким векторным полем в дифференцируемую, причём выполняется правило Лейбница

$$X(\varphi\psi) = \varphi(X\psi) + \psi(X\varphi).$$

Векторное поле X как инвариантный (не зависящий от выбора координат) объект часто отождествляют с оператором дифференцирования вдоль этого поля. В нек-рой координатной окрестности U этот оператор представляют в виде $X|_U = \sum_i X^i \partial/\partial x^i$. При переходе к др. системе координат получается др. выражение $X_{U'} = \sum_i X'^i \partial/\partial x'^i$. Однако на пересечении координатных окрестностей, $U \cap U'$, эти выражения совпадают благодаря закону преобразования компонент векторного поля $\sum_i X'^i \partial/\partial x'^i = \sum_i X^i \partial\partial/\partial x^i$. Такое совпадение является отражением геом. (инвариантного) характера векторного поля и соответствующего дифференциального оператора.

Дифференциальные операторы, соответствующие двум векторным полям X и Y, можно прокоммутировать, полученный оператор $[X, Y] = XY - YX$ снова является дифференциальным, т. е. соответствует нек-рому векторному полю. Это векторное поле наз. к о м м у т а т о р о м исходных векторных полей, его компоненты в нек-рой системе координат равны

$$[X, Y]^i = \sum_j (X^j \partial Y^i/\partial x^j - Y^j \partial X^i/\partial x^j).$$

Все (дифференцируемые) векторные поля образуют *Ли алгебру* относительно операции коммутирования.

Группы преобразований. Векторное поле X задаёт в каждой точке М. направление и скорость движения в этом направлении. Если двигаться в заданных направлениях с заданными скоростями, то все точки М. будут постепенно перемещаться, т. е. определяется семейство преобразований М., зависящее от параметра, α_t, причём $\alpha_t\alpha_{t'} = \alpha_{t+t'}$, т. е. это семейство представляет собой однопараметрич. группу преобразований. В общем случае векторное поле определяет однопараметрич. группу преобразований лишь локально, т. е. в нек-рой окрестности каждой точки и для нек-рого интервала изменения параметра. Если группа определена глобально (на всём многообразии и для всех значений параметра), векторное поле наз. п о л н ы м. На компактных М. все гладкие векторные поля являются полными.

Обратно, если задана однопараметрич. группа преобразований $t \to \alpha_t$, то определяется векторное поле $X = d\alpha_t/dt|_{t=0}$. Дифференцирование вдоль такого поля описывается ф-лой

$$X(x)\varphi = d\varphi(\alpha_t(x))/dt\,|_{t=0}.$$

Связь между векторным полем и группой преобразований можно выразить в виде $\alpha_t^* = \exp(-tX)$, где X —