ческой кинетике, 3 изд., М., 1987; Николис Г., Пригожин И., Самоорганизация в неравновесных системах, пер. с англ., М., 1979; Физика XX века. Развитие и перспективы. Сб. ст., М., 1984; Хакен Г., Синергетика. Иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах, пер. с англ., М., 1985; Васильев В. А., Романовский Ю. М., Яхно В. Г., Автоволновые процессы, М., 1987; Бункин Ф. В., Кириченко Н. А., Лукьянчук Б. С., Термохимическое действие лазерного излучения, «УФН», 1982, т. 138, с. 45; их же, Структуры при лазерном окислении металлов, «УФН», 1987, т. 152, с. 162.

Н. В. Карлов, Б. С. Лукьянчук.

ОБРА́ТНОЙ ЗАДА́ЧИ РАССЕ́ЯНИЯ МЕ́ТОД — метод исследования нек-рых *нелинейных уравнений математической физики.* Введён К. Гарднером (C. S. Gardner), Дж. Грином (J. M. Greene), М. Крускалом (M. D. Kruskal) и Р. Миурой (R. M. Miura) в 1967, хотя отд. элементы метода были известны ещё в 19 в. (см. *Беклунда преобразование*). Основан на представлении исследуемого нелинейного ур-ния в виде условия совместности для системы линейных ур-ний. Первонач. вариант метода, использующий теорию рассеяния для дифференц. операторов (отсюда назв. метода), был применён к *Кортевега — де Фриса уравнению*

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0, \qquad (1)$$

к-рое является условием совместности переопределённой линейной системы ур-ний

$$(\hat{L} - \lambda^2)\psi = 0, \qquad (2)$$

$$\psi_t + \hat{A}\psi = 0, \qquad (3)$$

$$\hat{L} = -d^2/dx^2 + u(x, t), \ \hat{A} = 4d^3/dx^3 + 3[ud/dx + (d/dx)u]$$

и эквивалентно операторному соотношению (представлению Лакса)

$$\partial\hat{L}/\partial t = [\hat{L}, \hat{A}]. \qquad (4)$$

Ур-ние (2) — стационарное одномерное *Шрёдингера уравнение* с потенциалом $u(x, t)$, зависящим от времени t как от параметра [предполагаем, что $u(x, t)$ достаточно быстро убывает при $x \to \pm\infty$].

Основные понятия. Волновые ф-ции ψ, соответствующие непрерывному спектру оператора $\hat{L}$, определим асимптотич. выражениями

$$\psi \to e^{-i\lambda x} + r(\lambda, t)e^{-i\lambda x} \quad \text{при } x \to +\infty,$$

$$\psi \to a^{-1}(\lambda, t)e^{i\lambda x} \quad \text{при } x \to -\infty.$$

Из представления (4) следуют соотношения

$$\begin{gathered} r(\lambda, t) = r(\lambda, 0)e^{8i\lambda^3 t}, \quad a(\lambda, t) = a(\lambda, 0), \\ r(\lambda, 0) \equiv r(\lambda), \quad a(\lambda, 0) \equiv a(\lambda). \end{gathered} \qquad (5)$$

Ф-ция $r(\lambda, t)$ имеет смысл амплитуды рассеяния назад, ф-ция $a^{-1}(\lambda)$ — амплитуды рассеяния вперёд. Ф-ция $a(\lambda)$ аналитична и имеет на верх. мнимой полуоси конечное число нулей $\lambda_n = i\varkappa_n$, определяющих дискретный спектр оператора Шрёдингера $\hat{L}$. Положение нулей не зависит от времени. Собств. ф-ции дискретного спектра $\psi_n(x, t)$ определим нормировкой $\psi_n \to \exp(-\varkappa_n x)$ при $x \to +\infty$, тогда $\psi_n \to c_n(t)\exp(\varkappa_n x)$ при $x \to -\infty$. Из ф-л (5) следует, что

$$c_n(t) = c_n(0)\exp\left(8\lambda_n^3 t\right), \quad c_n(0) \equiv c_n. \qquad (6)$$

Рассмотрим интегральное уравнение Гельфанда — Левитана — Марченко для ф-ции $K(x, z)$, позволяющей решить обратную задачу рассеяния:

$$K(x, z) + F(x + z) + \int_x^\infty K(x, s)F(s + z)ds = 0, \qquad (7)$$

здесь

$$F(\xi) = \sum_{n=1}^N M_n^2 e^{-\varkappa_n \xi} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty r(\lambda)e^{i\lambda\xi}d\lambda,$$

$$M_n^2 = ic_n/(da/d\lambda)_{\lambda = i\varkappa_n}$$

При помощи ф-лы $u(x) = 2dK(x, x)/dx$ можно восстановить потенциал в ур-нии Шрёдингера (2) по набору т. н. данных рассеяния, т. е. величин $r(\lambda)$, $\varkappa_n$, c_n. При физически очевидных предположениях $|r(\lambda)| < 1$, $M_n^2 > 0$, $\varkappa_n > 0$ эта задача однозначно разрешима. Вместо данных рассеяния можно говорить о функции $F(\xi)$.

О. з. р. м. основан на соотношениях (5), (6), определяющих зависимость данных рассеяния от времени и позволяющих решать задачу Коши для ур-ния (1) по схеме

$$u(x) \xrightarrow{\text{I}} F(\xi) \xrightarrow{\text{II}} F(\xi, t) \xrightarrow{\text{III}} u(x, t).$$

На I этапе решается прямая задача рассеяния, на III этапе — обратная. Для эфф. решения этих задач, вообще говоря, необходимы численные расчёты. Достоинство О. з. р. м. состоит в том, что он позволяет сколь угодно далеко продвинуться по времени без потери точности.

При $r(\lambda) = 0$ ур-ние (7) сводится к системе N линейных алгебраич. ур-ний и его решение выражается в элементарных ф-циях. Это решение описывает взаимодействие N уединённых волн (*солитонов*) и наз. N-солитонным. При любом t профили N-солитонных решений представляют собой по отношению к ур-нию Шрёдингера безотражат. потенциалы (потенциалы Баргмана), на к-рых не происходит отражения назад.

Описанный вариант О. з. р. м. можно рассматривать как нелинейный аналог метода разделения переменных при решении задачи Коши для линейных эволюц. ур-ний (напр., *диффузии уравнения*). Этот вариант метода можно использовать также для решений ур-ния Кортевега — де Фриса, убывающих в одном направлении, но нельзя использовать для неубывающих решений. Нек-рые из таких решений можно построить методами алгебраич. геометрии. Профили этих решений — периодич. или квазипериодич. потенциалы, в непрерывном спектре к-рых имеется конечное число n запрещённых зон (см., напр., *Бриллюэна зона*). Простейший из них (однозонный потенциал) выражается через эллиптические функции и описывает частное решение ур-ния (1) — стационарную периодич. волну. Общее решение (n-зонный потенциал) описывает взаимодействие n таких волн. С n-зонными потенциалами связаны Θ-функции Якоби, при помощи к-рых можно записать и решения линейной системы (2), (3) — функции Блоха.

Применение метода. Описанная схема применима к разл. нелинейным дифференц. и интегро-дифференц. ур-ниям, представимым в виде

$$u_t = f(\hat{\Lambda}, t)u_x. \qquad (8)$$

Здесь $f(\xi, t)$ — произвольная рациональная ф-ция переменной ξ, а $\hat{\Lambda}$ — т. н. рекурсионный оператор:

$$\hat{\Lambda}\varphi = \varphi_{xx} - 4u\varphi + 2u_x\int_x^\infty \varphi(y)dy$$

[для ур-ния Кортевега — де Фриса $f(\xi, t) \equiv \xi$]. В частном случае $f(\xi) = \xi^m$ ур-ния (8) (т. н. высшие ур-ния Кортевега — де Фриса) являются дифференциальными и имеют порядок $(2m + 1)$. Ур-ния (8) являются условиями совместности линейной системы ур-ний, к-рая отличается от системы (2), (3) видом оператора $\hat{A}$. Если $f(\xi, t)$ — полином по переменной ξ, то $\hat{A}$ — дифференц. оператор.

Все ур-ния (8) имеют n-солитонные и конечнозонные решения. Каждое из ур-ний (8) имеет бесконечное число интегралов движения. В качестве интеграла можно