вольной фазы $U(1)$ и, т. о., содержат два независимых параметра, характерных для двумерной сферы. В С. (26) имеется нетривиальное подпространство — аналитическое гармоническое суперпространство

$$\{x^{\mu}_{A}=x^{\mu}-i\bar{\theta}^{i}\sigma^{\mu}\bar{\theta}^{j}(u^{+}_{i}u^{-}_{j}+u^{+}_{j}u^{-}_{i}),$$
$$\theta^{+\alpha}=\theta^{\alpha i}u^{+}_{i},\ \bar{\theta}^{+\dot{\alpha}i}=\bar{\theta}^{\dot{\alpha}i}u^{+}_{i},\ u^{\pm i}\}\equiv\{\zeta^{M},\ u^{\pm i}\},\qquad(27)$$

замкнутое относительно $N=2$ суперсимметрии

$$\delta x^{\mu}_{A}=-2i(\varepsilon^{k}\sigma^{\mu}\bar{\theta}^{+}+\theta^{+}\sigma^{\mu}\bar{\varepsilon}^{k})u^{-}_{k},$$
$$\delta\theta^{+\alpha}=\varepsilon^{\alpha i}u^{+}_{i},\ \delta\bar{\theta}^{+\dot{\alpha}}=\bar{\varepsilon}^{\dot{\alpha}i}u^{+}_{i},\ \delta u^{\pm i}=0.$$

В С. (27) можно определить операцию сопряжения (отличную от обычного комплексного сопряжения), относительно к-рой (27) вещественно. Соответственно заданные на нём суперполя (аналитич. гармонич. суперполя) могут выбираться вещественными.

Аналитич. С. (27) играет фундам. роль в $N=2$ суперсимметрии: все $N=2$ теории (теории материи, Янга — Миллса, супергравитации) формулируются явно инвариантным геом. образом на языке аналитич. $N=2$ суперполей, свободных от сторонних связей [12]. Аналитич. суперполя $\Phi(q)$ характеризуются $U(1)$-зарядом q (наряду с возможным лоренцевым индексом) и являются решением условий грассмановой $N=2$ аналитичности:

$$D^{+}_{\alpha}\Phi^{(q)}(z^{M},u)=\bar{D}^{+}_{\dot{\alpha}}\Phi^{(q)}(z^{M},u)=0\Rightarrow\Phi^{(q)}\equiv$$
$$\equiv\varphi^{(q)}(\zeta^{M},u),\ D^{+}_{\alpha}=D^{i}_{\alpha}u^{+}_{i},\ \bar{D}^{+}_{\dot{\alpha}}=\bar{D}^{i}_{\dot{\alpha}}u^{+}_{i}.\qquad(28)$$

Они содержат бесконечное число $N=2$ супермультиплетов с одним и тем же суперспином и нарастающими суперизоспинами, связанными с q ф-лой

$$I_{n}=\left|\frac{q}{2}-1\right|+n,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \dots .$$

Бесконечное число полей с нарастающими изоспинами в $\varphi^{(q)}$ обусловлено зависимостью $\varphi^{(q)}$ от гармонич. переменных $u^{\pm i}$, разложение по к-рым является гармонич. разложением на сфере S^{2}. Физ. поля $N=2$ теорий входят в мультиплеты с низшими суперизоспинами, а бесконечный набор высших супермультиплетов оказывается либо вспомогательными, либо калибровочными степенями свободы.

Бесконечное число вспомогат. полей — принципиально новая черта теорий в гармонич. С. Благодаря этому свойству удалось преодолеть ряд «no-go» теорем и построить формулировки вне массовой поверхности для $N=2$ гипермультиплетов (см. ниже) материи (в плоском и искривлённом С.) и для $N=3$ теории Янга — Миллса (в аналитич. гармонич. $N=3$ С. [13]).

Примеры $N=2$ теорий. Осн. супермультиплет $N=2$ материи — гипермультиплет. Он отвечает значениям суперспина $Y=0$ и суперизоспина $I=1/2$ и на массовой поверхности состоит из $SU(2)$-дублета скалярных полей $\varphi^{i}(x)$ и дираковского изосинглетного поля фермиона $\psi_{\alpha}(x)$, $\bar{\chi}^{\dot{\alpha}}(x)$. Вне массовой поверхности гипермультиплет описывается аналитическим $N=2$ суперполем $q^{+}(\zeta,u)$ [12]:

$$q^{+}(\zeta,u)=\varphi^{i}(x)u^{+}_{i}+\dots+\theta^{+\alpha}\psi_{\alpha}(x)+\dots+\bar{\theta}^{+}_{\dot{\alpha}}\bar{\chi}^{\dot{\alpha}}+\dots,\qquad(29)$$

где точками обозначены поля с высокими изоспинами, возникающие из гармонич. разложений коэффициентов при членах с разными степенями θ. Инвариантное действие свободного гипермультиплета в плоской $N=2$ суперсимметрии даётся интегралом по С. (27):

$$I_{q}=\int d^{4}x\,d^{2}\theta^{+}d^{2}\bar{\theta}^{+}du\,\bar{q}^{+}D^{+2}_{A}q^{+},\qquad(30)$$

где du — мера интегрирования на сфере S^{2}, D^{+2}_{A} — сохраняющая аналитичность гармонич. производная,

$$D^{+2}_{A}=u^{+i}\frac{\partial}{\partial u^{-i}}-2i(\theta^{+}\sigma^{\mu}\bar{\theta}^{+})\partial_{\mu}.$$

Лангранжева плотность в (30) имеет $U(1)$-заряд $q=+4$, т. к. мера интегрирования имеет $U(1)$-заряд $q=-4$. Из действия (30) следует ур-ние движения

$$D^{+2}_{A}q^{+}=0,\qquad(31)$$

к-рое приравнивает нулю весь бесконечный набор вспомогат. полей с высшими изоспинами в q^{+}, одновременно приводя к правильным ур-ниям движения для физ. полей. Наиб. общее самодействие гипермультиплетов получается добавлением к лангранжиану в (30) произвольной ф-ции $V^{+4}(q^{+},\bar{q}^{+},u^{\pm})$ с зарядом $q=+4$. В секторе физ. полей при этом возникает нелинейная сигма-модель (отвечающая гиперкелеровым многообразиям [14]).

В $N=2$ калибровочной теории осн. суперполем является вещественная аналитич. гармонич. связность $V^{(+2)}(\zeta,u)$:

$$V^{+2A'}T^{A}=\exp(i\lambda^{B}T^{B})V^{+2A}T^{A}\exp(-i\lambda^{B}T^{B})+$$
$$+i^{-1}\exp(i\lambda^{B}T^{B})D^{2+}_{A}\exp(-i\lambda^{B}T^{B})$$
$$(\lambda^{B}\equiv\lambda^{B}(\zeta,u)),\qquad(32)$$

через к-рую выражаются все остальные геом. объекты теории. Бесконечный набор «лишних» супермультиплетов с суперизоспинами $I=1,\ 2,\ 3,\ \dots$ в V^{+2} устраняется калибровочной группой (32), в итоге остаётся лишь калибровочный $N=2$ супермультиплет вне массовой поверхности с $Y=0$, $I=0$, содержащий конечное число полей. В калибровке Весса — Зумино в V^{+2} остаётся стандартный $N=2$ калибровочный мультиплет $(\varphi(x),\ A_{\mu}(x),\ \psi^{i}_{\alpha}(x),\ \bar{\psi}^{i}_{\dot{\alpha}}(x),\ D^{(ij)}(x))$, где $\varphi(x)$ — комплексное скалярное поле, $A_{\mu}(x)$ — калибровочное поле, ψ^{i}_{α}, $\bar{\psi}^{i}_{\dot{\alpha}}$ — дублет майорановских спиноров, $D^{(ij)}(x)$ — триплет вспомогат. полей (для простоты индекс A опущен). Геом. суперполевая формулировка $N=2$ калибровочной теории может быть последовательно выведена из требования сохранения понятия грассмановой $N=2$ аналитичности (28) для гармонич. суперполей, принадлежащих к нетривиальным представлениям калибровочной группы [12]. Из аналогичного принципа исходит и геом. формулировка $N=2$ супергравитации, в к-рой осн. объектами являются компоненты аналитич. гармонич. репера (см. *Супергравитация*).

$N=3$ гармоническое суперпространство [13] возникает при добавлении к $\mathbb{R}^{4|12}=\{x^{\mu},\ \theta^{\alpha i},\ \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}_{j}\}$ $(i,\ j=1,\ 2,\ 3)$ 6-мерного внутр. пространства, в к-ром группа автоморфизмов $N=3$ супералгебры $SU(3)$ реализуется как группа движений. $N=3$ теория Янга — Миллса допускает формулировку вне массовой поверхности в аналитич. подпространстве гармонич. $N=3$ С., имеющем 6 нечётных переменных. Соответствующие $N=3$ аналитич. калибровочные суперполя содержат бесконечное число как калибровочных, так и вспомогат. степеней свободы. Последнее обстоятельство оказывается решающим для преодоления $N=3$ «no-go» теоремы [11]. Из самого существования явно инвариантной суперполевой формулировки $N=3$ теории Янга — Миллса следует теорема о неперенормировке, к-рая даёт простое доказательство отсутствия УФ-расходимостей в $N=3$ калибровочной теории (на массовой поверхности эта теория совпадает с $N=4$ калибровочной теорией, ставшей первым примером теории поля без УФ-расходимостей).

Искривлённое суперпространство характеризуется нетривиальными супертензорами кручения и кривизны и служит естеств. ареной для теорий супергравитации.

Перспективы развития концепции С. связаны в первую очередь с применениями в теориях протяжённых объектов типа суперструны, где важную роль должны сыграть более сложные варианты гармонич. С. Есть основания надеяться, что в ближайшие годы будет достигнут также решающий прогресс в построении геом. суперполевых формулировок таких 4-мерных теорий, как $N=4$ теория Янга — Миллса, супергравитации с $N\geqslant3$ и т. п.

Лит.: 1) Волков Д. В., Акулов В. П., О возможном универсальном взаимодействии нейтрино, «Письма в ЖЭТФ», 1972, т. 16, с. 621; 2) Salam A., Strathdee J., Super-gauge transformations, «Nucl. Phys.», 1974, v. 76B, p. 477; 3) Березин Ф. А., Введение в алгебру и анализ с антикоммутирующими переменными, М., 1983; 4) Огиевецкий В. И., Мезинческу Л., Симметрии меж-