особенности («ежи»), к-рые классифицируются группой $\pi_2(RP^2)=\mathbb{Z}$, а их конфигурации и «арифметика» те же, что и для точечных дефектов в изотропном магнетике. Линейные дефекты — дисклинации в трёхмерном нематике — характеризуются группой $\pi_1(RP^2)=\mathbb{Z}_2$, где $\mathbb{Z}_2=\{0, 1\}$ — подгруппа $\mathbb{Z}$, задающая «двоичную арифметику» топологич. инвариантов дисклинаций: $0+1=1$; $1+1=0$. В связи с этим устойчивыми будут лишь дисклинации с нечётным топологич. инвариантом — индексом Франка N_F (рис. 6, *г, д, е*), а дисклинации с чётным индексом N_F (рис. 6, *а, б*) будут неустойчивы, т. к. они имеют возможность «вытекать в третье измерение». Индекс Франка определяется по аналогии с др. топологич. инвариантами как целое число N_F, связанное с изменением фазы α вектора $\boldsymbol{d}$ при обходе по замкнутому контуру вокруг линии дисклинации соотношением $\alpha=\pi N_F$. Заметим, что дисклинации, изображённые на рис. 6 (*г, д, е*),

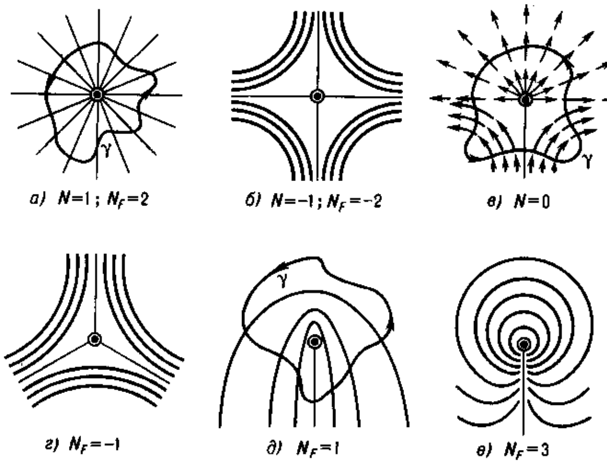

Рис. 6. Вихревые дефекты в ферромагнетиках и дисклинации в нематиках (во всех случаях особые линии перпендикулярны плоскости рисунков).

невозможны в ферромагнетиках, т. к. при этом поле $\boldsymbol{n}$ имело бы разрыв вдоль поверхности, опирающейся на особую линию. В нематиках они существуют лишь в силу неразличимости взаимно противоположных направлений директора $\boldsymbol{d}$. В двумерных нематиках $D=RP^1\simeq S^1$ и отсутствуют устойчивые точечные дефекты в силу $\pi_2(RP^2)=0$. В то же время в них реализуются как устойчивые структуры все типы дисклинаций, изображённые на рис. 6, т. к. $\pi_1(RP^1)=\mathbb{Z}$. Топологич. анализ дефектов в антиферромагнетиках проводится по аналогии с нематиками.

Для сверхтекучей компоненты He^4 (см. *Гелий жидкий, Квантовая жидкость*) областью вырождения D состояний, описываемых волновой ф-цией $\psi=|\psi|\exp(i\varphi)$, будет область возможных значений волновой ф-ции при фиксированном её модуле $|\psi|$. Физически это связано с т. н. *Бозе — Эйнштейна конденсацией* бесспиновых атомов изотопа He^4 в состоянии с наим. энергией жидкости при темп-ре $T<T_C$, т. е. с накоплением в одном и том же состоянии большого числа частиц квантовой жидкости. Если пренебречь слабым взаимодействием между атомами жидкости, то при $T=0$ °К в состоянии с мин. энергией будут находиться все без исключения частицы, что и позволяет описывать их одной и той же (не зависящей от координат частиц) волновой ф-цией $\psi=|\psi|\exp(i\varphi)$. Нормированная волновая ф-ция $\Phi(x)=(\psi/|\psi|)\exp[i\varphi(x)]$ в этом случае играет роль параметра порядка, т. е. на комплексной плоскости, область вырождения представляет собой окружность $D=S^1$, вдоль к-рой меняется фаза φ (вырождение состояний по фазе). На основании того, что $\pi_2(S^1)=0$, $\pi_1(S^1)=\mathbb{Z}$, заключаем, что точечных дефектов в He^4 нет; в то же время линейные дефекты — вихри в He^4 — будут устойчивыми особенностями с целочисленными топологич. инвариантами.

Действительно, скорость течения сверхтекучей компоненты He^4 выражается через градиент фазы $v_s=(\hbar/m)\nabla\varphi$, где m — масса атома He^4. Циркуляция скорости выражается через изменение фазы $\delta\varphi$ при обходе линии вихря по произвольному замкнутому контуру γ и равна $(2\pi\hbar/m)\delta\varphi$. Однозначной волновая ф-ция Φ будет лишь при условии, что изменение фазы $\delta\varphi=2\pi N$, где $N\in\mathbb{Z}$, т. е. имеет место квантование циркуляции скорости при обходе вокруг линии вихря. Поскольку $\delta\varphi=2\pi N$ при обходе по любому сколь угодно малому контуру γ, это означает, что сама фаза не может быть однозначно определена на линии вихря, т. е. это действительно особая линия. Именно в силу квантования циркуляции интенсивность вихря лишена возможности уменьшаться непрерывным образом под действием вязкости. С др. стороны, запрещено возникновение вихрей с произвольной циркуляцией. Всё это и обеспечивает незатухающий характер сверхтекучего движения в He^4. Значению $N=0$ соответствуют безвихревые, или потенциальные, течения He^4. Топологич. свойства сверхпроводников совпадают со свойствами сверхтекучего He^4.

Ситуация с топологически стабильными дефектами в He^3 более сложная, т. к. параметром порядка в этом случае является комплексный тензор 2-го ранга A_{ik}, i, $k=1, 2, 3$. Это, в частности, есть отражение того факта, что в отличие от бозе-жидкости He^4, He^3 является ферми-жидкостью, допускающей существование анизотропных сверхтекучих фаз. Для B-фазы He^3 пространство вырождения D топологически эквивалентно $SO(3)\otimes U(1)$. Вычисления гомотопич. групп $\pi_2(D)=0$, $\pi_1(D)=\pi_1[SO(3)]+\pi_1[U(1)]=\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}$ указывают на то, что в B-фазе He^3 отсутствуют топологически стабильные точечные дефекты, а линейные дефекты — вихри — характеризуются набором из двух топологич. чисел.

Для A-фазы He^3 пространство $D=S^2\otimes SO(3)/\mathbb{Z}_2$. Это означает, что пространство $S^2\otimes SO(3)$ — двулистное накрытие D, а, следовательно, односвязное пространство $S^2\otimes SU(2)$ — четырёхлистное накрытие D. В итоге для гомотопич. групп пространства вырождения параметра порядка A-фазы имеем $\pi_2(D)=\mathbb{Z}$, $\pi_1(D)=\mathbb{Z}_4$, т. е. в A-фазе He^3 точечные дефекты характеризуются целочисленным топологич. инвариантом, а для вихрей топологич. инвариант будет вычетом по модулю 4. Подобная структура фаз и топология дефектов предполагается и в нейтронных звёздах.

Динамика многомерных Т. с. Топологич. анализ дефектов даёт лишь качественные ответы и необходимые критерии существования стабильных Т. с. типа наличия изоморфизмов $\pi_k(D)=\mathbb{Z}$ для пространств вырождения параметров порядка. При этом в роли параметров порядка могут фигурировать скалярные, комплексные, векторные и в общем случае тензорные поля. Количественное описание Т. с. основывается на построении, как правило, нелинейных динамич. моделей, обладающих след. свойствами: (а) ур-ния Эйлера — Лагранжа модели допускают регулярные локализованные решения с конечными динамич. характеристиками (энергией, импульсом, моментом импульса и т. д.); (б) состояния наделены нетривиальными топологич. характеристиками Q (зарядами, индексами и т. д.); (в) функционал энергии модели оценивается снизу через топологич. инвариант $Q:\mathscr{E}>cf(Q)$, $c=\text{const}$, что обеспечивает динамич. устойчивость Т. с.

Вихри Нильсена — Олесена (Н. В. Nielsen, P. Olesen, 1973). Динамич. описание линейных дефектов типа вихря возможно, напр., в рамках т. н. абелевой калибровочной модели Хиггса (P. W. Higgs, 1964; см. *Хиггса механизм*) с калибровочной группой $U(1)$ и лагранжианом

$$\mathscr{L}(x)=\frac{1}{2}(D_\mu\varphi)^*D_\mu\varphi-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}-\frac{\lambda}{4}(\varphi^*\varphi-a_0^2)^2, \qquad (7)$$

где μ, $\nu=0, 1, 2$; * означает комплексное сопряжение, $F_{\mu\nu}(x)=\partial_\mu A_\nu(x)-\partial_\mu A_\mu(x)$ — тензор напряжённости эл.-