$$\mathscr{E} \geqslant 4\pi |Q|, \quad (16)$$

обеспечивающая его устойчивость в каждом гомотопич. классе. В случае равенства в (16) минимум энергии (14) реализуется на решениях т. н. ур-ний Богомольного (Е. Б. Богомольный, 1976)

$$\partial_i \boldsymbol{n} = \pm \varepsilon_{ik}[\boldsymbol{n}\partial_k \boldsymbol{n}], \quad (17)$$

к-рые в координатах стереографич. проекции

$$\omega_1 = \frac{2n_1}{1-n_3}, \quad \omega_2 = \frac{2n_2}{1-n_3}$$

представляют собой условия Коши — Римана:

$$\frac{\partial\omega_1}{\partial x_1} = \pm\frac{\partial\omega_2}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial\omega_1}{\partial x_2} = \mp\frac{\partial\omega_2}{\partial x_1}.$$

Т. о., любая *аналитическая функция* $\omega(z)$ или $\omega(z^*)$, где $\omega=\omega_1+i\omega_2$, $z=x_1+ix_2$, записанная в переменных n^a и $\boldsymbol{x}$, удовлетворяет ур-ниям (17). Напр.,

$$\omega(z) = [(z-z_0)/\lambda]^N \quad (18)$$

описывает Т. с. нелинейной $O(3)$-модели с топологич. зарядом $Q=N$, т. н. N-вихри Белавина — Полякова. Здесь λ — любое действительное число, n — любое положительное целое число, z_0 — произвольное комплексное число. Считая поле $\boldsymbol{n}$ спиновой переменной, нелинейную $O(3)$-модель можно рассматривать как вариант *Гейзенберга модели* планарного магнетика. Статические решения (18) в $(2+1)$-измерениях переносятся и на случай $O(3)$-модели в $(1+1)$-измерениях, где они реализуются как *инстантоны* [1]. В $(3+1)$ измерениях для возможных Т. с. — неособых кольцевых вихрей с единичным индексом Хопфа — при выборе функционала энергии $\mathscr{E}$ в виде (14) не имеет места оценка (16) и $\mathscr{E}\sim R$, где R — радиус кольца. Следовательно, минимум энергии достигается при $R\to 0$, что свидетельствует о нестабильности кольцевого вихря. Ситуация исправляется, напр., добавлением в (13) членов более высокого порядка по градиентам $\boldsymbol{n}$-поля.

Тороны Рыбакова (Ю. П. Рыбаков, 1981) — Т. с. в виде замкнутых «закрученных» струн с нетривиальным индексом Хопфа — реализуются в т. н. модели Фаддеева (Л. Д. Фаддеев, 1973) для $\boldsymbol{n}$-поля в $(3+1)$-измерениях, где $\boldsymbol{n}(x,t)$-поле определено на $R^3\otimes R^1$ и подчинено условиям $|\boldsymbol{n}|=1$, $n^a(\infty,t)=\delta^a_3$, $a=1,2,3$, в силу к-рых его можно представить как отображение $\boldsymbol{n}: S^3\to S^2$. Соответственно $\boldsymbol{n}$-полевые конфигурации классифицируются элементами группы $\pi_3(S^2)=\mathbb{Z}$. Лагранжиан модели

$$\mathscr{L} = -\frac{\varepsilon^2}{4}f_{\mu\nu}^2 + \lambda^2(\partial_\mu n^a)^2 - m^2(1-n_3), \quad \mu,\nu=0,1,2,3, \quad (19)$$

где ε, λ, m — постоянные параметры,

$$f_{\mu\nu} = 2\varepsilon_{abc}\partial_\mu n^a\partial_\nu n^b n^c \equiv \partial_\mu\mathscr{A}_\nu - \partial_\nu\mathscr{A}_\mu.$$

Массовый член $m^2(1-n_3)$ добавляется в (19) для обеспечения требуемого асимптотич. поведения полей на бесконечности. Топологич. инвариант модели — индекс Хопфа Q_H вычисляется по ф-ле

$$Q_H = -\frac{1}{(8\pi)^2}\int(\mathscr{A}\cdot\mathscr{B})d^3x, \quad \mathscr{B}=\mathrm{rot}\,A, \quad (20)$$

и для энергии имеет место оценка

$$\mathscr{E} > \varepsilon\lambda(4\pi)^2\sqrt{2}\,3^{3/8}|Q_H|^{3/4},$$

обеспечивающая стабильность неособых вихрей в рамках модели Фаддеева (19). Минимум энергии реализуется на аксиально-симметричной конфигурации (тороне), к-рую удобно записывать в угловых переменных β, γ на S^2: $\beta=\beta(\rho,z)$, $\gamma=l\alpha+v(\rho,z)$, где l — целое число, ρ,α,z — цилиндрич. координаты, $v(\rho,z)$ — нек-рая новая переменная, и для регулярных решений $\beta\to 0$ при $\rho\to 0$. Это свидетельствует о тороидальной структуре Т. с. в модели Фаддеева, представляющих собой замкнутые «закрученные» струны (или неособые кольцевые вихри). Математически существование таких Т. с. доказано, однако не известно ни одного точного решения ур-ний поля модели. Подобные локализованные структуры возникают в изотропных магнетиках, в физике элементарных частиц (модель тяжёлых мезонов), в астрофизике и т. д. [8].

Монополи 'т Хоофта — Полякова (G. 't Hooft, А. М. Поляков, 1974) возникают как Т. с. в $(3+1)$ измерениях при обобщении калибровочной модели Хиггса (7) на случай неабелевой калибровочной группы, напр. группы $SU(2)$ (см. *Магнитный монополь, Калибровочные поля*). Лагранжиан выбирается в виде (7) со след. изменениями: $F_{\mu\nu}\to F^a_{\mu\nu}=\partial_\mu A^a_\nu-\partial_\nu A^a_\mu+e\varepsilon^{abc}A^b_\mu A^c_\nu$; $D_\mu\varphi\to D_\mu\varphi^a=\partial_\mu\varphi^a+e\varepsilon^{abc}A^b_\mu\varphi^c$; вместо комплексного рассматривается изовекторное хиггсовское поле $\varphi^a(x)$, $a=1,2,3$. Т. с. реализуются как сферически-симметричные статические конфигурации вида

$$A_0=0,\ A^a_i=\varepsilon_{aij}x_j\frac{1-g(r)}{er^2},\quad i,j=1,2,3,$$
$$\varphi^a=-x^a\frac{h(r)}{er^2},\quad r=(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{1/2}, \quad (21)$$

где ф-ции $g(r)$, $h(r)$ находятся как решения системы:

$$r^2\frac{d^2g}{dr^2}=g(g^2-1)+gh^2,$$
$$r^2\frac{d^2h}{dr^2}=2hg^2+\frac{\lambda}{e^2}(h^3-e^2a_0^2r^2), \quad (22)$$

отвечающие след. поведению калибровочного A^a_i и изовекторного φ^a полей на границе R^3:

$$A^a_i\to\varepsilon_{aib}\frac{r^b}{er^2};\quad B_i\equiv\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}F^{jk}\to\frac{r_i}{er^3};$$
$$\varphi^a\to a_0\frac{r^a}{r};\quad D_\mu\varphi^a\to 0 \text{ при } r\to\infty. \quad (23)$$

Выбор нетривиальных условий (23), с одной стороны, обеспечивает конечность энергии $\mathscr{E}$, с другой — позволяет полям $\varphi^a(x)$ принимать разл. направления (во внутр. изотопич. пространстве, см. *Изотопическая инвариантность*) в бесконечно удалённых точках, т. к. $\varphi_a\varphi^a\to a_0^2$. Поскольку граница пространства R^3 может быть отождествлена с «пространственной» сферой S^2, а поля $\varphi^a(\infty)$ принимают значения на «полевой» сфере S^2, то естественно рассматривать их как регулярные отображения, классифицируемые группой $\pi_2(S^2)=\mathbb{Z}$. Топологич. инвариант модели в этом случае связан с магн. зарядом монополя, что подтверждается с помощью калибровочно инвариантного тензора эл.-магн. поля т'Хоофта

$$F_{\mu\nu}=n^aF^a_{\mu\nu}-\frac{1}{e}\varepsilon^{abc}n^aD_\mu n^bD_\nu n^c;\quad n^a=\frac{\varphi^a}{|\varphi|}, \quad (24)$$

к-рый на конфигурации (21) равен $F_{ij}=\varepsilon_{ijk}x_k/er^3$, а магн. поле $B_k=x_k/er^3$ в точности совпадает с полем точечного монополя с магн. зарядом $q_m=1/e$. В отличие от электродинамики Максвелла тензор (24) имеет дуальный тензор с ненулевой дивергенцией и, как следствие,

$$\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial^\nu F^{\rho\sigma}=\frac{1}{2e}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{abc}\partial^\nu n^a\partial^\rho n^b\partial^\sigma n^c=\frac{4\pi}{e}J_\mu. \quad (25)$$

Видно, что $(1/e)J_\mu$ имеет смысл магн. тока, в то время как J_μ — топологич. ток. Действительно, из (25) следует, что магн. поле $\boldsymbol{B}$ подчиняется ур-нию $\nabla\boldsymbol{B}=4\pi J_0/e$, откуда по теореме Гаусса — Остроградского получаем соотношение между топологич. инвариантом Q [для отображений из $S^2\to S^2$ он наз. индексом Кронекера (L. Kronecker)] и магнитным монопольным зарядом q_m: $q_m=Q/e$. Т. о., магн. заряд монополя имеет топологич. природу, а его квантование возникает как чисто классич. эффект [1], [2], [7].

Точные решения системы (22) известны лишь для одиночного монополя в пределе $\lambda\to 0$ — т. н. пределе Пра-