$$m\ddot{x}+2\alpha\dot{x}=0,\ x|_{t=0}=0,\ \dot{x}|_{t=0}=v_0,$$

из к-рого следует

$$x(t)=\frac{mv_0}{2\alpha}\left[1-\exp(-2\alpha t/m)\right],$$

т. е. конечное положение $x_f=mv_0/2\alpha$. Отсюда следует также, что перевести систему из одного стационарного состояния $x_f^{(1)}$ в другое, близкое к первому, $x_f^{(2)}$, можно с помощью малого воздействия (возмущения). По отношению к такого типа состояниям равновесия употребляется термин «безразличное равновесие».

Несколько более сложная ситуация возникает в том случае, когда область (фазового) пространства, занимаемая безразличными состояниями равновесия, ограничена. Примером такой системы является шарик, находящийся в яме, дно к-рой — горизонтальная плоскость (рис. 4). При любых нач. условиях шарик в конце концов остановится в одной из точек дна ямы. Широкий класс систем, обладающих аналогичными свойствами, может быть описан с помощью нелинейного дифференц. ур-ния

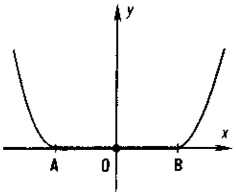

Рис. 4.

$$\ddot{x}+2\gamma\dot{x}+\omega^2(x)\,x=0,$$

в к-ром $\omega_0^2(x)=\omega_0^2\,\theta(x^2-x_0^2)$. Здесь $\theta(z)$ — единичная ф-ция Хевисайда. Данная система имеет континуум стационарных состояний $-x_0<x<x_0$, каждое из к-рых устойчиво (безразличное равновесие). Фазовый портрет этой системы показан на рис. 5. Для этой и подобных систем характерно то, что стационарные состояния на нек-ром отрезке устойчивы (отрезок AB на рис. 4; отрезок $[-x_0, x_0]$ на рис. 5), но свойством асимптотич. устойчивости обладает лишь весь отрезок в целом. Реализуемость конкретного состояния из отрезка зависит от нач. условий. В таких случаях говорят о притягивающем отрезке (рис. 6).

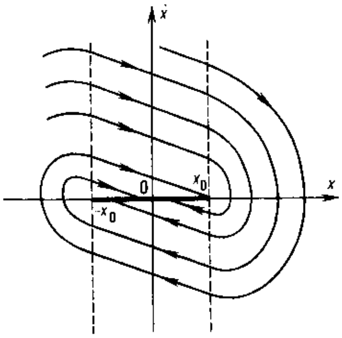

Рис. 5.

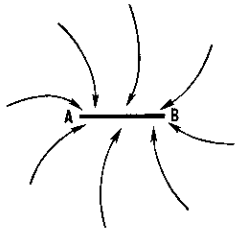

Рис. 6.

В ряде задач притягивающий отрезок формируется из конечного или счётного числа состояний равновесия, являющихся асимптотически устойчивыми. В этом случае соседние состояния часто отделены «барьером» и для перехода между ними требуется воздействие конечной (немалой) величины. Такая ситуация характерна для систем, описываемых дифференц. включениями, для распределённых систем и др.

Если система с малой диссипацией имеет один или неск. регулярных (нестохастических) аттракторов, причём её свойства вдали от аттракторов близки к свойствам K-систем (т. е. систем, обладающих локальной неустойчивостью и перемешиванием траекторий), то под действием возмущений система будет периодически отбрасываться от аттракторов и вдали от них длит. время будет вести себя подобно K-системе. В результате длительные периоды времени, когда система ведёт себя, как K-система, перемежаются периодами, когда её поведение регуляризуется (из-за притяжения к аттракторам). В этом случае говорят, что система имеет к в а з и а т т р а к т о р ы.

Иногда термин «квазиаттрактор» применяют к системе, к-рая имеет большое число асимптотически устойчивых стационарных состояний, причём соседние состояния отделены одно от другого достаточно низким барьером. Под действием случайных возмущений система будет перемещаться между разл. состояниями, оставаясь постоянно в окрестности притягивающего множества M (составленного из отдельных стационарных состояний). Если возмущение окажется немалым и система уйдёт далеко от M, то вследствие асимптотической устойчивости компонентов M она вернётся в окрестность M. При наличии такого квазиаттрактора фазовые траектории системы притягиваются к нему, а затем под действием шумов начинается случайное блуждание между его компонентами. Квазиаттракторы иногда обнаруживаются при численном исследовании нелинейных динамич. систем (без флуктуаций), где роль шумов играют погрешности вычислит. процедуры.

Для исследования У. обычно применяют два метода Ляпунова. П е р в ы й (или п р я м о й) метод основан на построении ф-ции (функционала) Ляпунова. Напр., для ур-ния нелинейного осциллятора с трением

$$\ddot{x}+2\gamma\dot{x}+\omega^2x-x^3=0 \qquad (6)$$

можно использовать следующую ф-цию Ляпунова:

$$V=V_1+V_2,\ V_1=\frac{1}{2}\dot{x}^2,\ V_2=\frac{1}{2}\omega^2x^2-\frac{1}{4}x^4. \qquad (7)$$

Эта величина имеет смысл полной энергии системы: слагаемое V_1 есть кинетическая, а V_2 — потенц. энергия. Производная по времени от V с учётом ур-ния (6) есть $dV/dt=-2\gamma\dot{x}^2\leqslant 0$, т. е. V убывает на любой траектории системы, кроме тех, к-рые отвечают стационарным состояниям ($x=-\omega,\ 0,\ +\omega$). Потенц. энергия имеет максимум $V_2=\omega^4/4$ при $|x|=\omega$. Поэтому для всех нач. условий

$$\{x,\ \dot{x}\}\in\bar{D},\ \bar{D}=\{|x|<\omega,\ V(x,\dot{x})<\omega^4/4\} \qquad (8)$$

ни одна из траекторий не выйдет за пределы $\bar{D}$ (иначе это повлекло бы рост, а не убывание V). Следовательно, система приближается к единственному стационарному состоянию в области $\bar{D}$, где V достигает минимума $V=0$, т. е. к $x=0$. Это состояние асимптотически устойчиво.

В т о р о й метод — исследование устойчивости по линейному приближению. Напр., линеаризация (6) вблизи стационарных решений x_c даёт

$$\ddot{y}+2\gamma\dot{y}+py=0,\ y(t)=x(t)-x_c, \qquad (9)$$

где $p=\omega^2>0$ для $x_c=0$ и $p=-2\omega^2<0$ для $x_c=\pm\omega$. Отсюда следует, что решение $x_c=0$ экспоненциально устойчиво, а решения $x_c=\pm\omega$ неустойчивы (как седловые особые точки).

У. п о ч а с т и п е р е м е н н ы х. Пусть система характеризуется n-мерным фазовым пространством $S_n=\{x_i|i=1,\ ...,\ n,\ n>1\}$. Точка $x=0$ устойчива по отношению к переменным $x_1,\ ...,\ x_k$, если она устойчива по Ляпунову в k-мерном подпространстве $S_k=\{x_i|i=1,...,k,\ k<n\}$ в соответствии с определением устойчивости, приведённым выше.

Близость к нулю переменных $x_{k+1},\ ...,\ x_n$ не требуется.

С т р у к т у р н а я у с т о й ч и в о с т ь (г р у б о с т ь) — свойство динамич. системы сохранять структуру фазового пространства при малых возмущениях (изменениях системы). Пусть A и $\tilde{A}$ — исходная и возмущённая системы. Система A наз. грубой, если для любого ε найдётся такое δ, что если системы A и $\tilde{A}$ отстоят друг от друга менее чем на δ (в метрике C^1), то найдётся отображение (гомеоморфизм) $A\rightarrow\tilde{A}$, сдвигающее точки менее чем на ε и преобразующее траектории невозмущённой системы в траектории возмущённой. Понятие грубости введено А. А. Андроновым и Л. С. Понтрягиным. Матем. аппарат, позволяющий исследовать структурную У.,— это *катастроф теория*, методами к-рой определяются области грубости системы и устанавливаются закономерности пере-