Одномерные динамические системы

В течение 70-х и 80-х гг. сформировался раздел Э. т., посвящённый изучению ДС с одномерным фазовым пространством, т. е. преобразований отрезка или окружности. Такие преобразования иногда возникают при рассмотрении ДС с более сложным фазовым пространством, но их значение в большей степени определяется др. факторами: красотой и глубиной самой теории одномерных отображений, её связями с такими областями математики, как теория чисел и комплексный анализ, и присутствием в ней ряда важных элементов, имеющих многомерный аналог. В то же время эта теория обладает спецификой, связанной в первую очередь с естественной упорядоченностью фазового пространства (наличием отношения «больше — меньше» между его точками), что часто позволяет при изучении одномерных отображений продвинуться гораздо дальше, чем в общем случае.

Простейший класс одномерных отображений, представляющий интерес для Э. т., состоит из кусочно-растягивающих отображений нек-рого отрезка $[a, b]$. Каждое такое отображение задаётся кусочно-монотонной ф-цией, производная к-рой по абс. величине больше единицы всюду, где она определена. Более точно, это означает следующее. На $[a, b]$ можно найти такие точки $x_1<x_2<\ldots<x_n$, что при всех x, отличных от $x_0=a$, x_1, ..., x_n, $x_{n+1}=b$, существует производная $f'(x)$, причём $|f'(x)|>\lambda$, где $\lambda>1$ (в точках x_i ф-ция f не обязана даже быть непрерывной). Пример такого отображения отрезка $[0, 1]$ можно задать ф-лой $Tx=\mathrm{Fr}(2x)$, где Fr, как и раньше, обозначает дробную часть числа. Здесь $n=1$, $x_1=1/2$ и отображение разрывно в точке $1/2$. Это отображение имеет непосредственное отношение к разложению числа в двоичную дробь: если $x=b_1(x)$, $b_2(x)$, ... — такое разложение, то $b_n(Tx)=b_{n+1}(x)$, $n=1, 2, \ldots$. Близкий пример, в к-ром отображение уже всюду непрерывно, получится, если положить $Tx=1-|2x-1|$, $0\leqslant x\leqslant 1$. Это т. н. шатровое отображение (tent map) — термин, указывающий на форму его графика.

Иногда рассматривают кусочно-монотонные отображения более общего вида, когда число отрезков монотонности бесконечно, а производная может в отд. точках принимать значения 1 и -1. Самый известный пример этого рода — преобразование Гаусса, определяемое на отрезке $[0, 1]$ ф-лой $Tx=\mathrm{Fr}(f(x))$, где $f(x)=1/x$ при $x\neq 0$ и $f(0)=0$. Тем самым $Tx=1/x-n$ при $1/(n+1)<x\leqslant 1/n$, все точки вида $1/n$, $n>1$ являются точками разрыва и, кроме того, $f'(1)=-1$. Если преобразование из первого примера было связано с разложением в двоичную дробь, то для преобразования Гаусса ту же роль играет разложение в непрерывную (или цепную) дробь: пусть $x=g_1(x)$, $g_2(x)$, ... — такое разложение для $x\in(0, 1)$; тогда, как и в первом примере, $g_n(Tx)=g_{n+1}(x)$, $n=1, 2, \ldots$. Преобразование Гаусса существенно отличается по форме от первых двух примеров. Однако порождённые ими ДС имеют сходные эргодич. свойства по отношению к естественным инвариантным мерам. В первом и втором примерах такой мерой является обычная длина (мера Лебега), а в третьем — вероятностная мера μ, к-рую можно задать нек-рой плотностью (т. е. $\mu(dx)=p(x)dx$). Инвариантность меры относительно преобразования Гаусса приводит к равенству $p(x)=((1+x)\ln 2)^{-1}$.

Абсолютно непрерывная инвариантная мера существует для весьма широкого класса кусочно-растягивающих отображений, хотя в общем случае невозможно указать явный вид её плотности. К упомянутому классу принадлежат, в частности, растягивающие отображения окружности. Отождествив окружность единичной длины с полуинтервалом $[0, 1)$, можно задать такое отображение уже встречавшейся ф-лой $Tx=\mathrm{Fr}(f(x))$, $0\leqslant x<1$, где f — достаточно гладкая ф-ция, определённая на отрезке $[0, 1]$ и удовлетворяющая условиям: $f(0)=0$, $f(1)$ — целое число и $f'(x)\geqslant\lambda>1$ (первый из приведённых выше примеров именно таков). При этих условиях существует абсолютно непрерывная T-инвариантная мера μ с положительной плотностью; по отношению к этой мере T является точным эндоморфизмом (см. выше), т. е. порождает полукаскад с сильными свойствами стохастичности; энтропия этой ДС равна $\int\ln f'(x)\mu(dx)$.

Большой интерес представляет изучение одномерных отображений, к-рые на одних участках являются растягивающими, а на других — сжимающими. Их свойства существенно зависят от того, как эти участки расположены вдоль траекторий отдельных точек. Примером может служить отображение $Tx=4x(1-x)$, $0\leqslant x\leqslant 1$, впервые рассмотренное Дж. фон Нейманом и С. Уламом (S. Ulam) в сер. 40-х гг. Под действием этого отображения критич. точка $x=1/2$ [в ней производная ф-ции $4x(1-x)$ равна нулю и, значит, в её окрестности происходит самое сильное сжатие] уже на первом шаге поглощается периодич. траекторией (состоящей из точек 1 и 0), в окрестности к-рой сжатие компенсируется постоянно действующим растяжением. Вследствие этого T ведёт себя так же, как растягивающие отображения: существует абсолютно непрерывная T-инвариантная мера (с плотностью $p(x)=\pi^{-1}(x(1-x))^{-1/2}$), относительно к-рой рассматриваемая ДС в высшей степени стохастична (изоморфна сдвигу Бернулли). Похожая картина наблюдается и в гораздо более общей ситуации. Если, в частности, рассмотреть однопараметрич. семейство отображений $T_\lambda=\mathrm{Fr}(\lambda f(x))$, $\lambda>0$, где ф-ция f в нек-ром смысле близка к квадратичной ф-ции $x(1-x)$, то для тех λ, при к-рых действует аналогичный только что описанному компенсационный механизм, преобразование T стохастично. Оказывается, что множество таких λ имеет положительную меру.

В 80—90-е гг. в теории одномерных отображений получили распространение методы, связанные с понятием ренорм группы и с теорией КАМ (Колмогорова — Арнольда — Мозера). В целом одномерная динамика пока далека от завершения. Последнее в ещё большей степени относится к теории многомерных не всюду растягивающих отображений, к-рая делает только первые шаги.

Случайные динамические системы

Необходимость изучения случайных ДС, т. е. систем, зависящих от случайного параметра, обусловлена теми же причинами, что и применение вероятностных моделей вообще. Важную роль играет, в частности, то обстоятельство, что при численном моделировании приходится производить дискретизацию системы как по времени, так и по пространству, а также учитывать возможность случайных ошибок. В Э. т. имеется конструкция, позволяющая ценой расширения фазового пространства сводить нек-рые случайные ДС к неслучайным. Пусть, напр., задана стационарная случайная последовательность с действительными значениями $\{y_n,\ n=0, 1, \ldots\}$ и при каждом n определено сохраняющее меру μ преобразование T_{y_n} пространства X, зависящее от случайной величины y_n как от параметра. Последовательность случайных преобразований $T^{(n)}=T_{y_n}T_{y_{n-1}}\ldots T_{y_1}T_{y_0}$ естественно называть *случайной ДС*. Для неё выполняется *случайная* (по другой терминологии — вероятностная) *эргодич. теорема*: если f — интегрируемая ф-ция на X, то событие, состоящее в том, что при μ-почти всех $x\in X$ существует предел

$$f^*(x)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}f(T^{(n)}x)$$

и что ф-ция f^* интегрируема по мере μ, имеет вероятность 1. Это утверждение сводится к индивидуальной эргодич. теореме для неслучайной ДС $\{\tilde{T}^n\}$ в пространстве пар (y, x), где $x\in X$; y — бесконечная последовательность действит. чисел, а преобразование $\tilde{T}^1$ имеет «треугольный» вид: $\tilde{T}^1(y, x)=(\varphi(y), \psi(y, x))$, где φ — сдвиг в пространстве последовательностей. Преобразования такого вида, наз. косыми произведениями, встречаются в разл. областях Э. т.