при $x \to \pm\infty$ и нормирована на единицу. Вычисление производной по времени от (1) с учётом *Шрёдингера уравнения* для одночастичного случая доказывает, что имеет место **первая теорема Эренфеста**: центр волнового пакета движется со скоростью, равной ср. импульсу частицы, отнесённому к её массе:

$$\frac{d}{dt}\int\psi^*\hat{x}\psi\,dx=\frac{1}{m}\int\psi^*\hat{p}(x)\psi\,dx=-\frac{i\hbar}{m}\int\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x}dx. \qquad (2)$$

Отсюда, в частности, можно вывести явный вид самосопряжённых оператора импульса $\hat{p}_x=-i\hbar\partial/\partial x$ и оператора координаты $\hat{x}=x$.

Вторая производная от (1) по времени приводит ко **второй теореме Эренфеста**: производная по времени от ср. импульса частицы равна ср. значению силы $\langle F_x\rangle=-\langle dU/dx\rangle$, приложенной к частице, т. е.

$$\frac{d}{dt}\int\psi^*\hat{p}_x\psi\,dx=-\int\psi^*\frac{dU}{dx}\psi\,dx. \qquad (3)$$

Т. о., при условии, что размерами волнового пакета по сравнению с характерным масштабом изменения потенциала $U(x)$ можно пренебречь, центр волнового пакета будет двигаться точно по законам классич. механики, записанным для ср. значений соответствующих физ. величин, т. е. соотношение между скоростью и импульсом частицы и 2-й закон Ньютона классич. механики выполняются в квантовой механике лишь для ср. значений физ. величин.

Для случая 3-мерных волновых пакетов Э. т. (2) и (3) записываются соответственно в виде

$$\frac{d}{dt}\int\psi^*\hat{\boldsymbol{r}}\psi\,d^3x=\frac{1}{m}\int\psi^*\hat{\boldsymbol{p}}\psi\,d^3x=-\frac{i\hbar}{m}\int\psi^*\nabla\psi\,d^3x, \qquad (2')$$

$$\frac{d}{dt}\int\psi^*\hat{\boldsymbol{p}}\psi\,d^3x=-\int\psi^*\nabla U\psi\,d^3x. \qquad (3')$$

Пределы применимости Э. т. (т. е. справедливости классич. законов для квантовых средних) выводятся, в частности, из разложения ф-ции $U(x)$ в окрестности «центра (тяжести)» $\langle x\rangle\equiv\bar{x}$ достаточно узкого пакета в ряд Тейлора и вычисления соответствующих квантовомеханич. средних. Если ограничиться первыми тремя членами разложения, то должны выполняться условия

$$\left|\frac{dU(\bar{x})}{d\bar{x}}\right|\gg\frac{1}{2}\left|\frac{d^3U(\bar{x})}{d\bar{x}^3}\right|\overline{(\Delta x)^2}, \qquad (4)$$

где $\overline{(\Delta x)^2}=\int\psi^*(x-\bar{x})^2\psi\,dx$, т. е. потенциал U должен достаточно плавно зависеть от $\bar{x}$. Кроме того, из сравнения выражений для кинетич. энергий классич. и квантовых частиц можно сделать вывод, что они сопоставимы лишь при достаточно больших импульсах, т. е. когда

$$\overline{(\Delta p)^2}\ll\overline{p^2}; \qquad (5)$$

из *неопределённостей соотношения*

$$\overline{(\Delta p)^2}\cdot\overline{(\Delta x)^2}\gg\frac{\hbar^2}{2}, \qquad (6)$$

с учётом (4) и (5) выводится ещё одно условие, необходимое, чтобы квантовая частица подчинялась классич. законам:

$$\bar{p}^2\left|\frac{dU(\bar{x})}{d\bar{x}}\right|:\left|\frac{d^3U(\bar{x})}{d\bar{x}^3}\right|\gg\frac{\hbar^2}{8}. \qquad (7)$$

Выбор достаточно узких волновых пакетов приводит к большому разбросу по импульсам, что, в свою очередь, влечёт за собой быстрое «расплывание» пакетов (квадратичный по времени закон «расплывания»). Т. о., волновой пакет можно сопоставить с частицей только для очень коротких временны́х промежутков. Поиск нерасплывающихся волновых пакетов или частицеподобных решений приводит к рассмотрению нелинейных обобщений ур-ний динамики (см. *Солитон*).

Лит.: Борисоглебский Л. А., Квантовая механика, 2 изд., Минск, 1988; Матвеев А. Н., Атомная физика, М., 1989; Рыбаков Ю. П., Терлецкий Я. П., Квантовая механика, М., 1991.

В. И. Санюк.

ЭРМИ́ТА ФУ́НКЦИИ — *специальные функции*, удовлетворяющие ур-нию Эрмита (C. Hermit)

$$y''-2zy'+2\nu y=0. \qquad (1)$$

Частные решения (1) имеют вид

$$y_1=H_\nu(z),\ \ y_2=H_\nu(-z);$$

$$y_1=e^{z^2}H_{-\nu-1}(iz),\ \ y_2=e^{z^2}H_{-\nu-1}(-iz).$$

При целом $\nu>0$ Э. ф. совпадают с полиномами Эрмита (см. *Ортогональные полиномы*). Интегральное представление, ф-лу дифференцирования и рекуррентное соотношение для Э. ф. $H_\nu(z)$ см. в ст. *Параболического цилиндра функции*. Э. ф. можно выразить через *вырожденные гипергеометрические функции*:

$$H_\nu(z)=2^\nu G(-\nu/2,\ 1/2,\ z^2),\ |\arg z|\leqslant\pi/2,$$

$$H_\nu(z)=\frac{2^\nu\sqrt{\pi}}{\Gamma[(1-\nu)/2]}F(-\nu/2,\ 1/2,\ z^2)-$$

$$-\frac{2^{\nu+1}\sqrt{\pi}}{\Gamma(-\nu/2)}zF\left(\frac{1-\nu}{2},\ \frac{3}{2},\ z^2\right).$$

Используя свойства гипергеометрических ф-ций, получим разложение в ряд

$$H_\nu(z)=\frac{1}{2\Gamma(-\nu)}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\Gamma\left(\frac{n-\nu}{2}\right)\frac{z^n}{n!}.$$

Асимптотич. представление при $z\to\infty$

$$H_\nu(z)=(2z)^\nu\left[1+O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right],\quad |\arg z|\leqslant\frac{\pi}{2},$$

$$H_\nu(z)=(2z)^\nu\left[1+O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right]+\frac{2^{\nu+1}\sqrt{\pi}}{\Gamma(-\nu)}\times$$

$$\times e^{z^2}(-2z)^{-\nu-1}\left[1+O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right],$$

$$\pi/2\leqslant|\arg z|\leqslant\pi,\quad |\arg(-z)|<\pi/2.$$

Для ф-ций $H_\nu(z)$ имеют место функциональные соотношения

$$H_\nu(z)=\frac{2^\nu\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{\pi}}e^{z^2}\left[e^{i\pi\nu/2}H_{-\nu-1}(iz)+e^{-i\pi\nu/2}H_{-\nu-1}(-iz)\right],$$

$$H_\nu(z)=e^{i\pi\nu}H_\nu(-z)+\frac{2^{\nu+1}\sqrt{\pi}}{\Gamma(-\nu)}e^{z^2+i\pi(\nu+1)/2}H_{-\nu-1}(-iz),$$

$$H_\nu(z)=e^{-i\pi\nu}H_\nu(-z)+\frac{2^{\nu+1}\sqrt{\pi}}{\Gamma(-\nu)}e^{z^2-i\pi(\nu+1)/2}H_{-\nu-1}(iz).$$

Лит. см. при статьях *Специальные функции*, *Параболического цилиндра функции*.

А. Ф. Никифоров.

ЭРМИ́ТОВ ОПЕРА́ТОР — *линейный оператор* A в гильбертовом пространстве H с плотной областью определения $D(A)$ и такой, что $\langle Ax, y\rangle=\langle x, Ay\rangle$ для любых $x, y\in D(A)$. Это условие эквивалентно тому, что: 1) $D(A)\subset D(A^*)$, 2) $Ax=A^*x$ для всех $x\in D(A)$, где A^* — оператор, сопряжённый с A, т. е. что $A\subset A^*$. Ограниченный Э. о. либо определён на всём H, либо по непрерывности расширяется до такого, и при этом $A=A^*$, т. е. A — самосопряжённый оператор. Неограниченный Э. о. может как иметь, так и не иметь самосопряжённые расширения. Иногда эрмитовым наз. самосопряжённый оператор, сохраняя для оператора, эрмитова в указанном выше смысле, название симметрический. В конечномерном пространстве Э. о. описывается эрмитовой матрицей.